Rational structure on algebraic tangles and closed incompressible surfaces in the complements of algebraically alternating knots and links

小沢　誠
駒澤大学総合教育研究部自然科学部門

2008年9月25日

今回分かったこと

- ループ成分を持たない代数タングルは、**ストリングを分離する本質的自由曲面**を唯一つ含む。

- 代数タングル内の本質的曲面の**境界スロープは一意的**である。

- 二つの**タングルの積**を定義した。

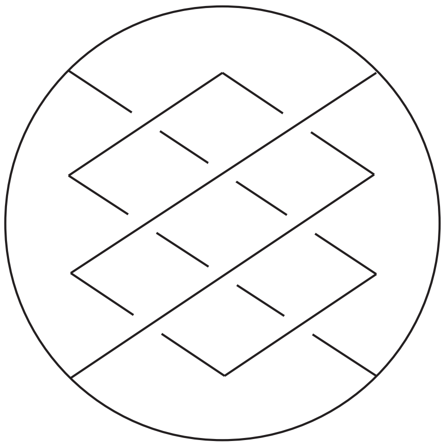
- 代数タングルから、その代数タングル内の本質的曲面の境界スロープへの写像は、**代数タングルから有理数への準同型写像**を与える。

- 代数絡み目と交代絡み目を含むクラスである、**代数的交代絡み目**を定義した。

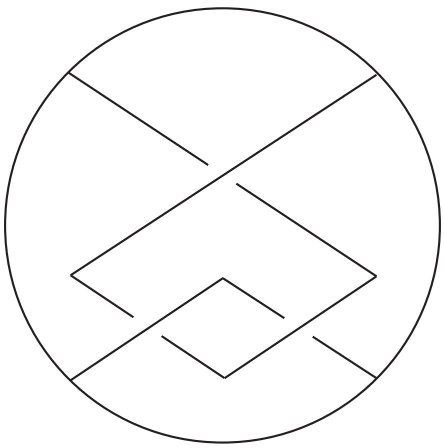
- 代数的交代絡み目の補空間が本質的閉曲面を含むならば、基本正則表示は分離的であるか、又は、ある代数タングルに本質的閉曲面が含まれる。特に、**代数的交代結び目の補空間は本質的閉曲面を含まない**。

Conway

rational tangle $\longleftrightarrow$ rational number

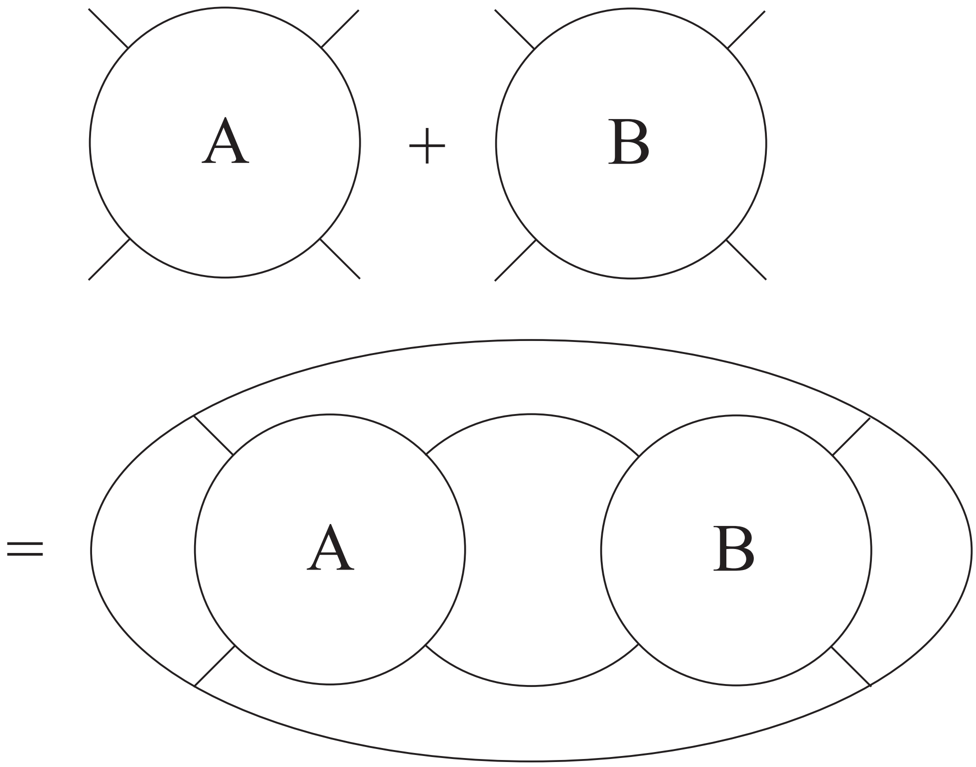


$$\longleftrightarrow \quad \frac{2}{3}$$

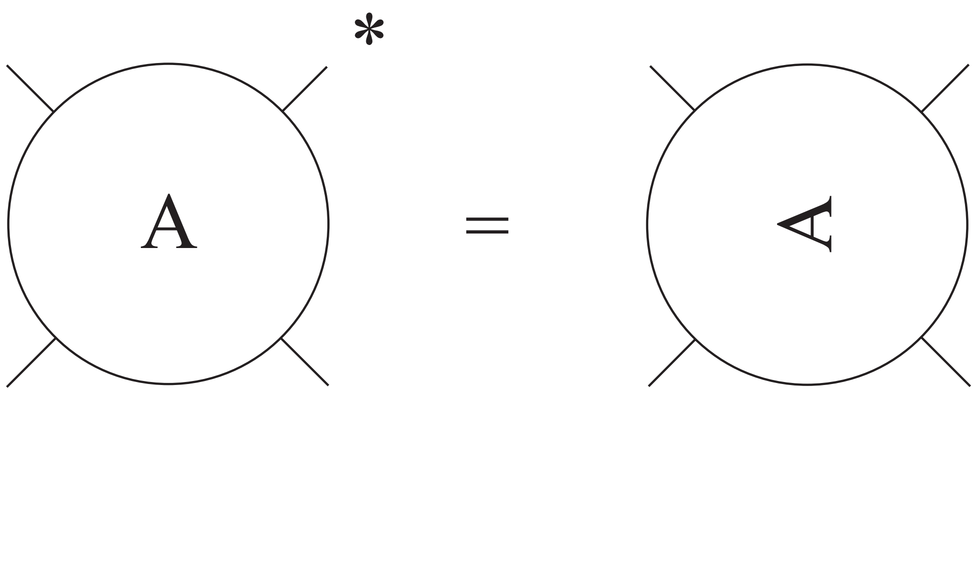


$$\longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

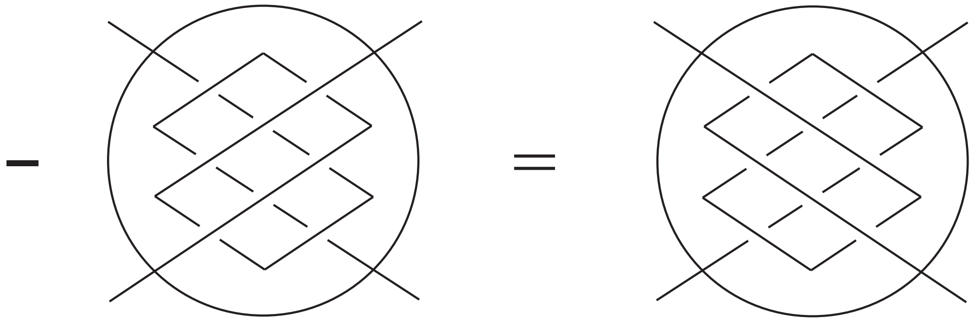
tangle sum



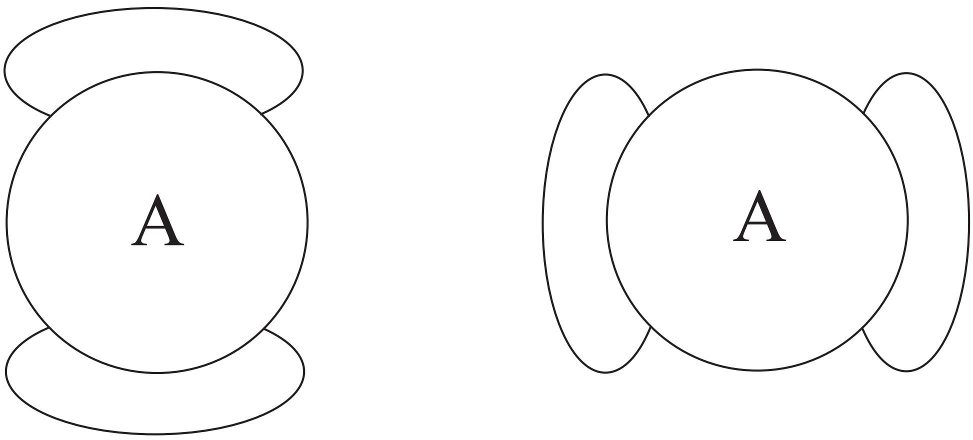
rotation



Reflection

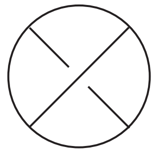
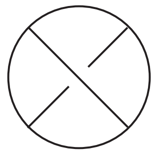


Numerator and denominator



N(T) D(T)

rational tangle

rational tangle = rational tangle +  or 

rational tangle = $\text{rational tangle}^{*}$

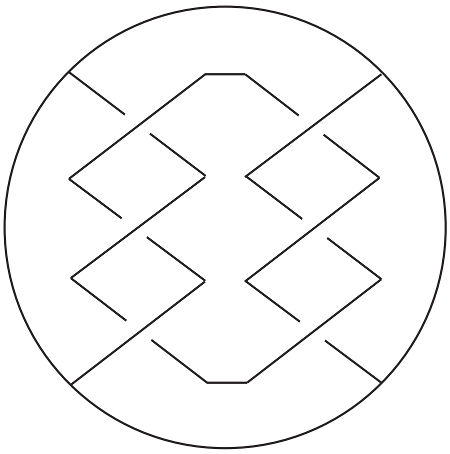
algebraic tangle

algebraic tangle = algebraic tangle + algebraic tangle

algebraic tangle = $\text{algebraic tangle}^{*}$

Krebes

2-string tangle $\longrightarrow$ formal fraction



$$\longrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{6}{9}$$

- $f(T_1 + T_2) = f(T_1) + f(T_2)$
- $f(-T) = -f(T)$
- $f(T^*) = -\frac{1}{f(T)}$
- $f(T) = p/q$
  $\Rightarrow |p| = \det N(T)$ and $|q| = \det D(T)$

曲面が**本質的**であるとは、

圧縮不可能 かつ
メリディアン的圧縮不可能 かつ
境界平行でない

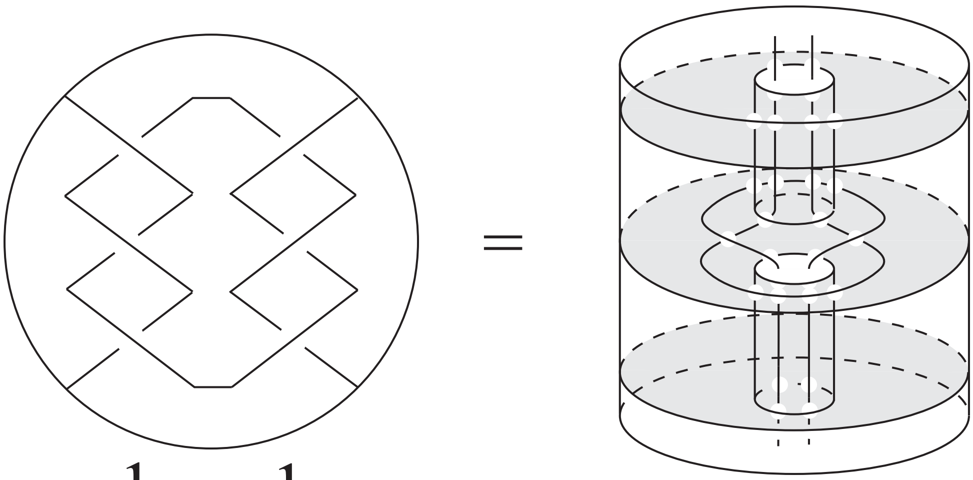
ときをいう。

また、曲面が**自由**であるとは、その曲面で切り開いたときハンドル体のみが得られるときをいう。

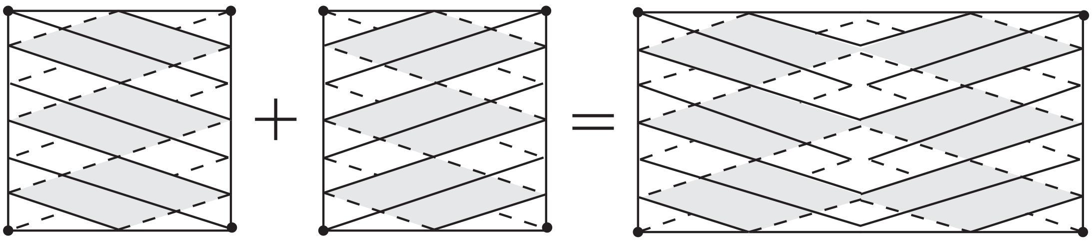
定理１

代数タングルは境界付き本質的曲面を少なくとも一つ含み、全ての境界付き本質的曲面の境界スロープは一意的である。
更に、ループ成分を持たない代数タングルは、ストリングを分離する本質的自由曲面を唯一つ含む。

Example 1

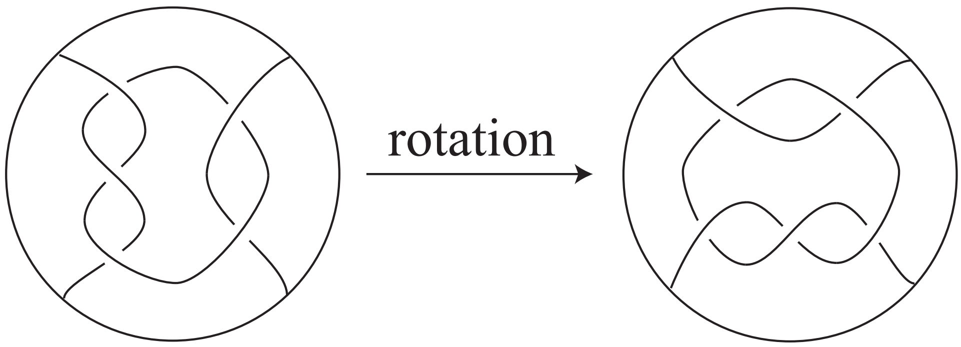


$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ $\qquad$ 0

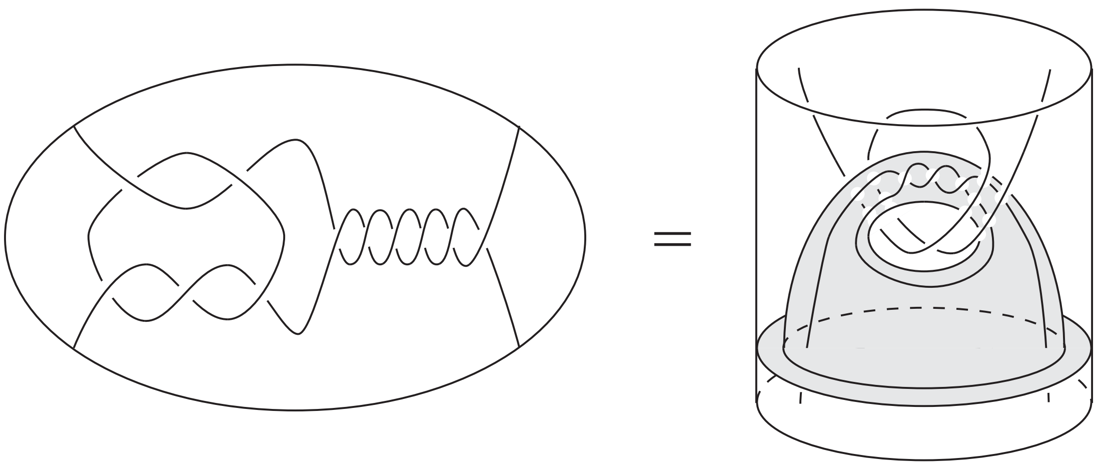


$-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ 0

Example 2

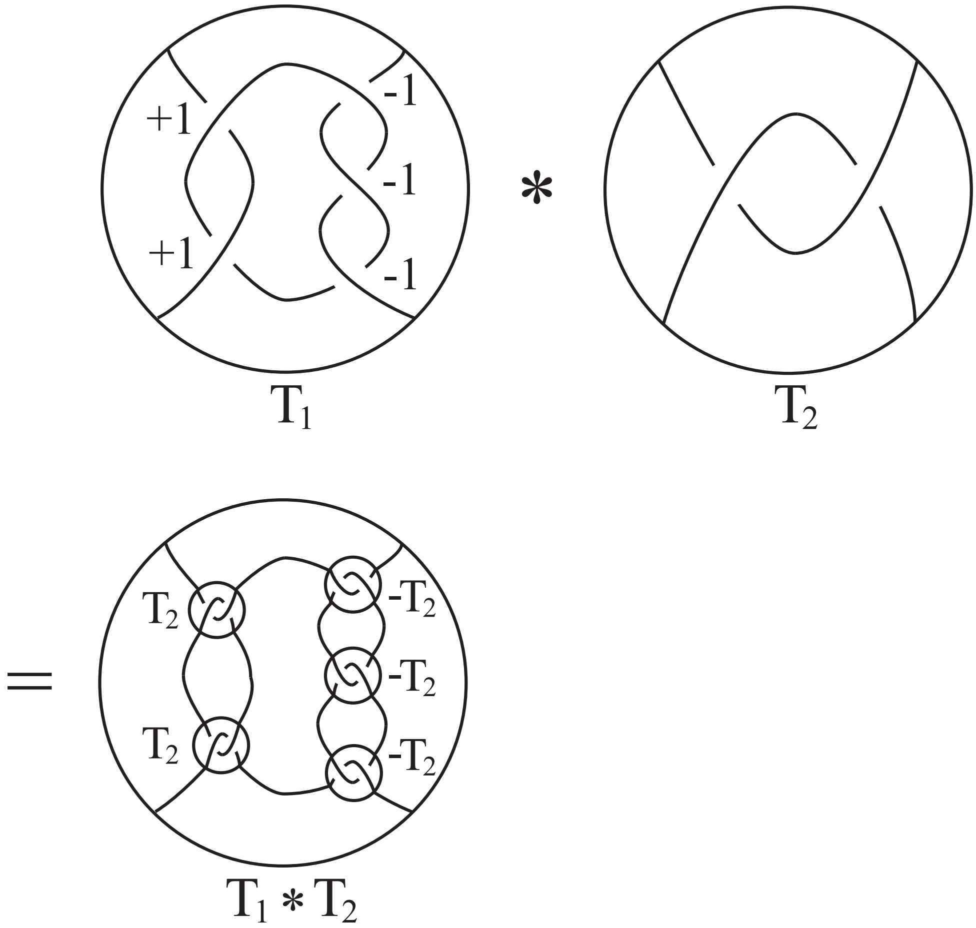


$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ $\qquad$ -6



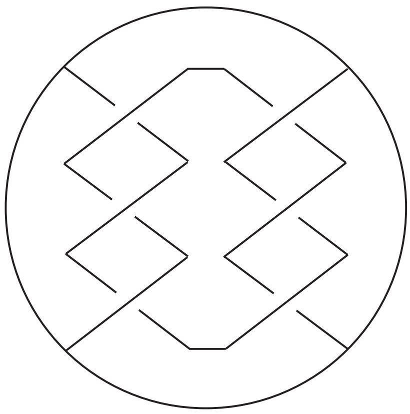
$-6 + 6$ $\qquad$ 0

Multiplication



定理 2

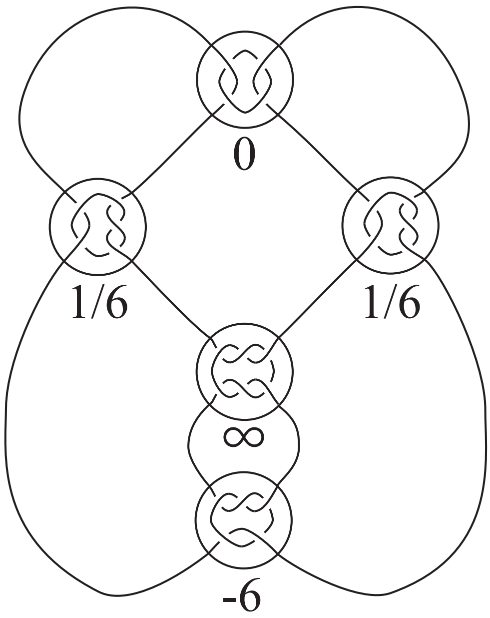
algebraic tangle $\xrightarrow{\ \phi\ }$ boundary slope



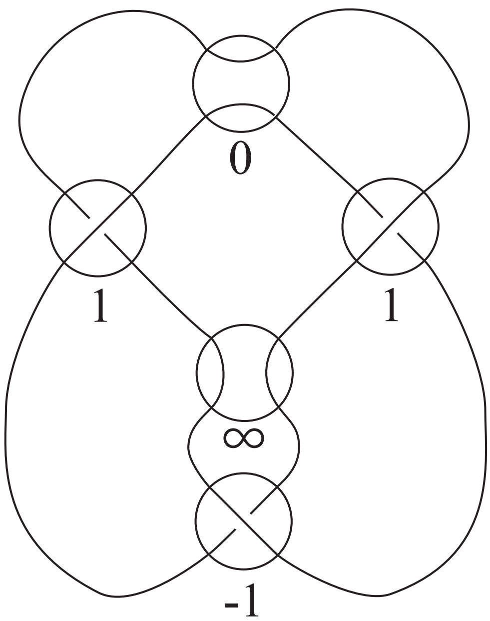
$$\longrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- $\phi(T_1 + T_2) = \phi(T_1) + \phi(T_2)$
- $\phi(T_1 * T_2) = \phi(T_1)\phi(T_2)$
- $\phi(-T) = -\phi(T)$
- $\phi(T^*) = -\frac{1}{\phi(T)}$

Algebraically alternating link

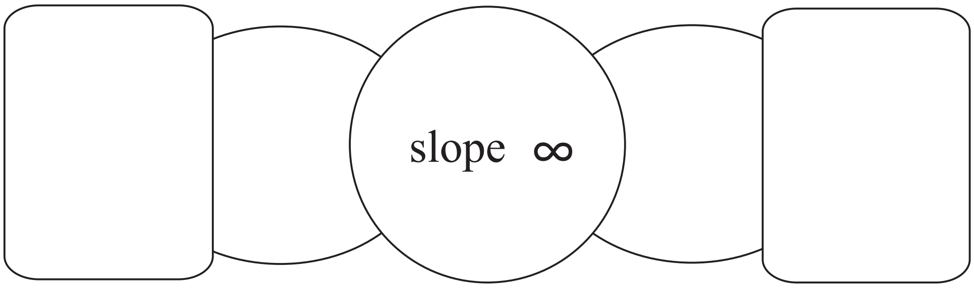


$\tilde{K}$: algebraically alternating link diagram

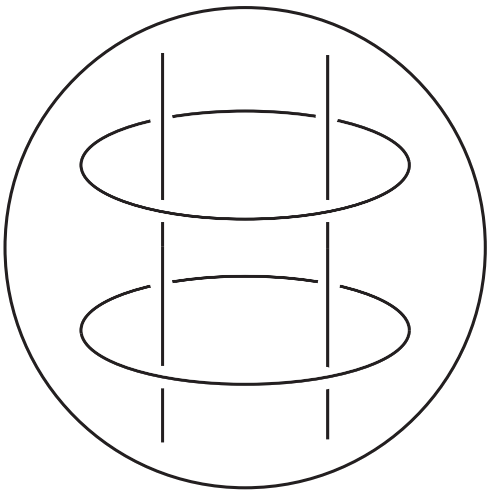


$\tilde{K_0}$: the basic diagram of $\tilde{K}$

切断タングル



Q_2



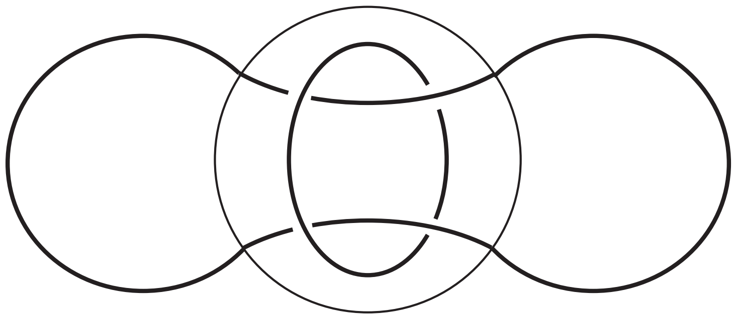
Q_2

定理 3

(S^3, K) を代数的交代絡み目とし、$F \subset S^3 - K$ を本質的閉曲面とする。このとき、

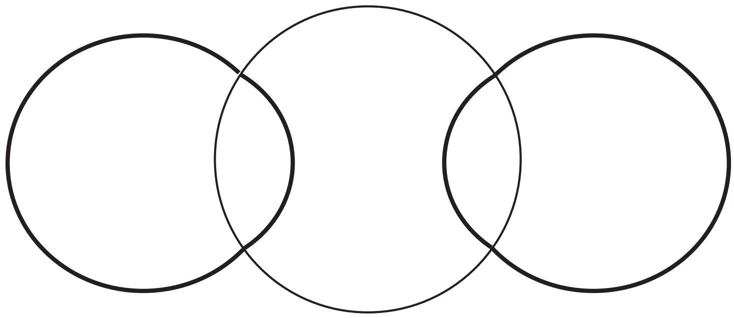
- 基本正則表示 $\tilde{K_0}$ は分離的、または、F はループ成分を含む代数タングルに含まれる。
- F が球面の場合、切断タングルが存在する。
- F がトーラスで、かつ、切断タングルが存在しない場合、(S^3, K) は Q_2 を含む。
- 特に、K が結び目の場合、本質的閉曲面は存在しない。

$\boxed{\text{Example 3}}$



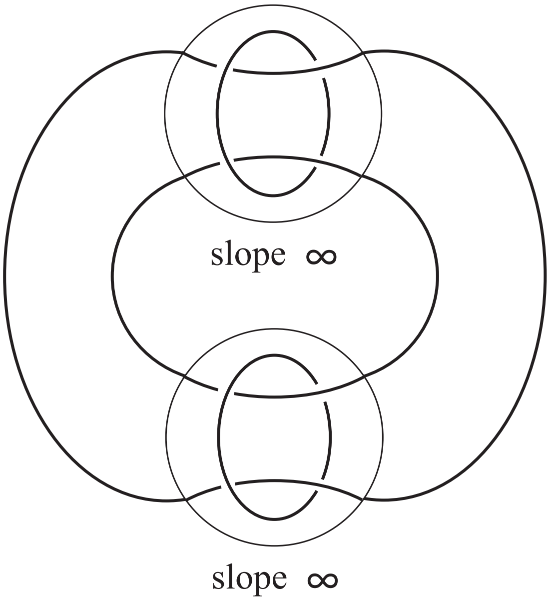
slope ∞

$\tilde{K}$: 代数的交代絡み目正則表示
s.t. $S^3 - K$ は本質的球面を含む



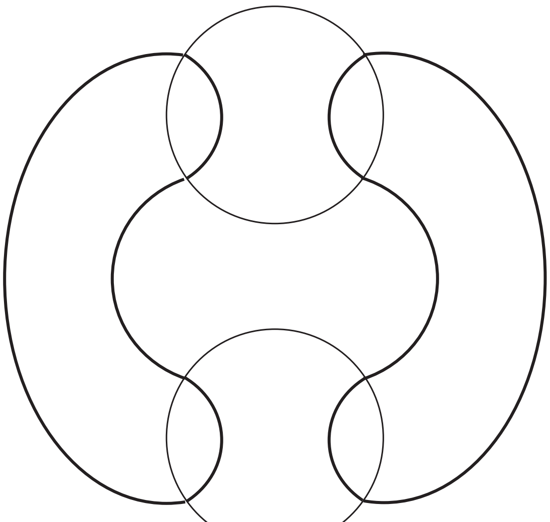
$\tilde{K}_0$: $\tilde{K}$ の基本正則表示

$\boxed{\text{Example 4}}$



$\tilde{K}$: 代数的交代絡み目正則表示

s.t. $S^3 - K$ は本質的トーラスを含む



$\tilde{K_0}$: $\tilde{K}$ の基本正則表示