# Closed incompressible surfaces of genus two in 3-bridge knot complements

小沢　誠（駒澤大学文学部）

2005年12月23日

## 結び目補空間内の圧縮不可能閉曲面からなる集合

結び目：$S^3 \supset K$

閉曲面：$S^3 - K \supset F$

定義

$\mathcal{CS}(K) = \{$ 圧縮不可能閉曲面 $F \subset S^3 - K\}$

$K$：自明 $\iff \mathcal{CS}(K) = \emptyset$

$K$：small $\iff \mathcal{CS}(K) = \{\partial N(K)\}$

small knotの例

- torus knot
- 2-bridge knot
- Montesinos knot with length 3

# 基本群とホモロジー群

基本群

$i: F \hookrightarrow S^3 - K$：圧縮不可能閉曲面
$i_*: \pi_1(F) \to \pi_1(S^3 - K)$：単射

ホモロジー群

$i: F \hookrightarrow S^3 - K$：圧縮不可能閉曲面
$i_*: H_1(F) \to H_1(S^3 - K)$：準同型

$H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ <meridian>
$Im(i_*) = m\mathbb{Z}$

$o(F) = |m|$

$K$：fibered knot $\Rightarrow \forall F$, $o(F) > 0$
$K$：alternating knot $\Rightarrow \forall F$, $o(F) = 1$
$K$：positive knot $\Rightarrow \forall F$, $o(F) > 0$

## $\mathcal{CS}(K)$から作られる複体

複体

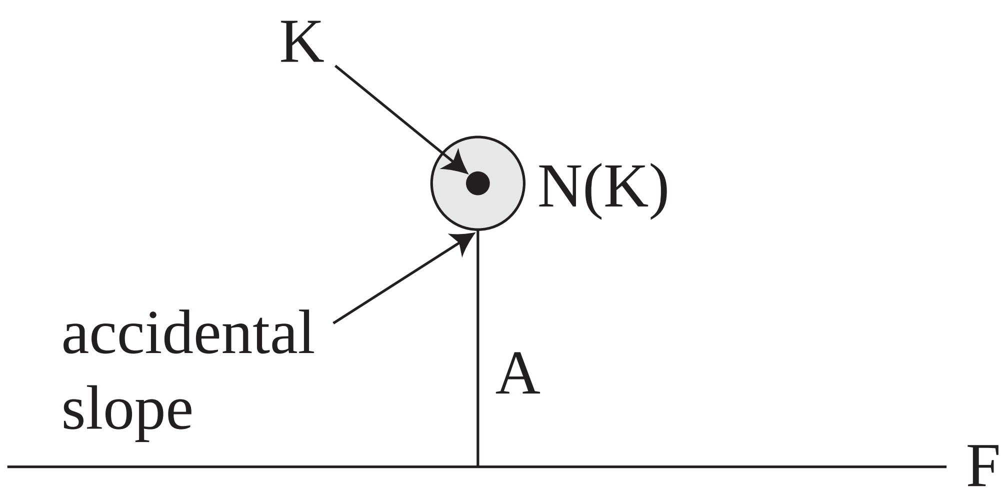
$\mathcal{CS}(K)$の各要素を頂点とし、$F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{CS}(K)$が互いに交わらないとき$n$-単体を張る。このとき得られる複体を$\mathcal{CX}(K)$とする。

任意の結び目$K$に対し、$\mathcal{CX}(K)$は連結である。

## $F$ と $\partial N(K)$ との間にアニュラスがある場合

accidental slope

$F$ 上の non-trivial loop と $\partial N(K)$ 上の loop を繋ぐ annulus $A \subset E(K)$ が存在するとき、$F$ を *accidental surface*、$A$ を *accidental annulus* という。loop $A \cap \partial N(K)$ によって定まる slope を *accidental slope* という。



**定理（市原-小沢）**

accidental slopeは、accidental annulusの取り方によらず、一意的に定まる。

**定理（市原-小沢）**

$n$-単体 $\Delta^n \in \mathcal{CX}(K)$ の頂点 $F_0, \ldots, F_n$ が全て accidental surfaceならば、それらの accidental slopeは一致する。

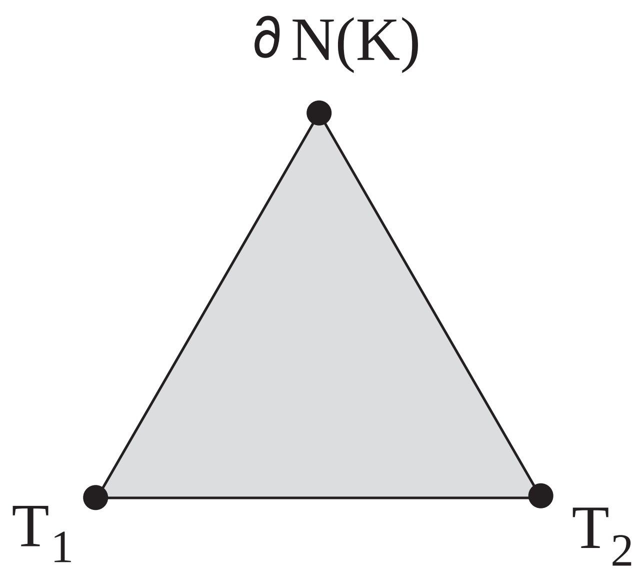
## $K$が3-bridge knotで、$F$が種数１の場合

**定理（Schubert）**

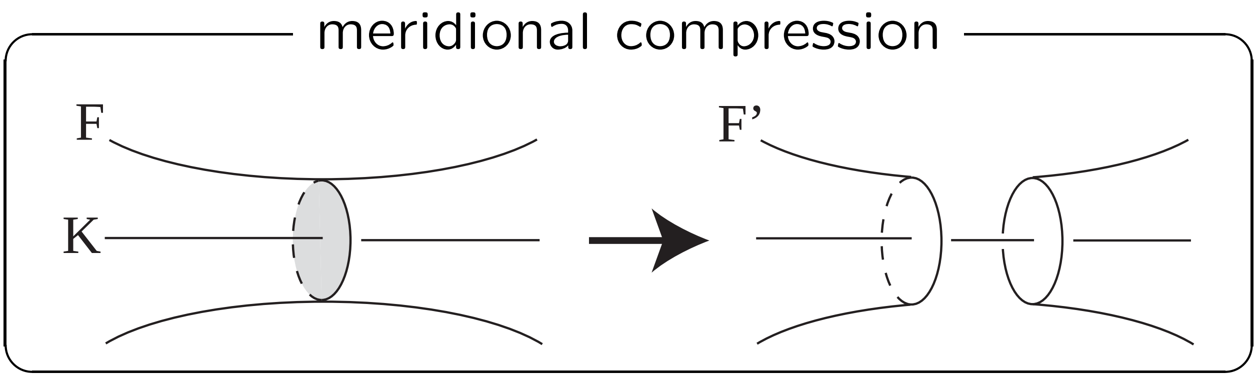
$K$：3-bridge knot
$\exists T \subset S^3 - K$：圧縮不可能トーラス
$\Rightarrow K =$ (2-bridge knot)$\#$(2-bridge knot)
$T$はswallow-followトーラス

$$\mathcal{CS}(K) = \{\partial N(K), T_1, T_2\}$$

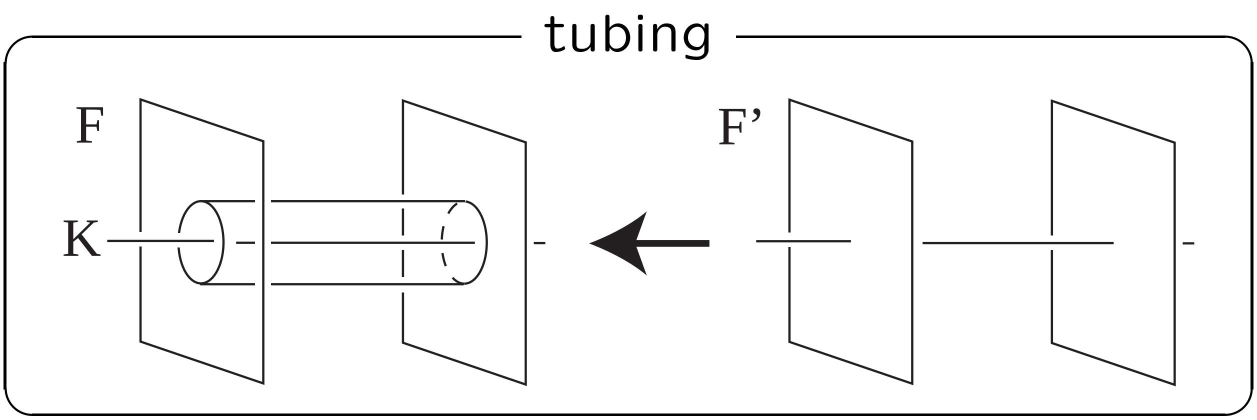
$$\mathcal{CX}(K) =$$



## メリディアン的圧縮とチュービング




$F$が圧縮不可能 $\Rightarrow$ $F'$も圧縮不可能




$F'$が圧縮不可能 $\Rightarrow$ $F$も圧縮不可能とは限らない

## $F$が種数２の場合

$F$の種数が２の場合、メリディアン的圧縮を行って得られる閉曲面は以下の３通りとなる。

I. 種数２の閉曲面で、$F \cap K = \emptyset$

II. 種数１の閉曲面で、$|F' \cap K| = 2$

III. 種数０の閉曲面で、$|F'' \cap K| = 4$

逆に、任意の種数２の圧縮不可能閉曲面は、これらの曲面からチュービングによって得られる。

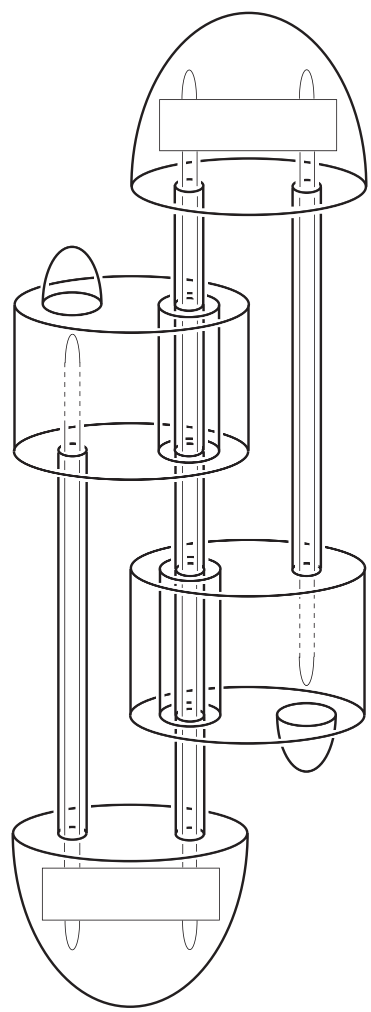
# 主結果

定理 I

$K$：3-bridge knot

$F \subset S^3 - K$：closed incompressible and meridionally incompressible surface of genus two

$\Rightarrow$

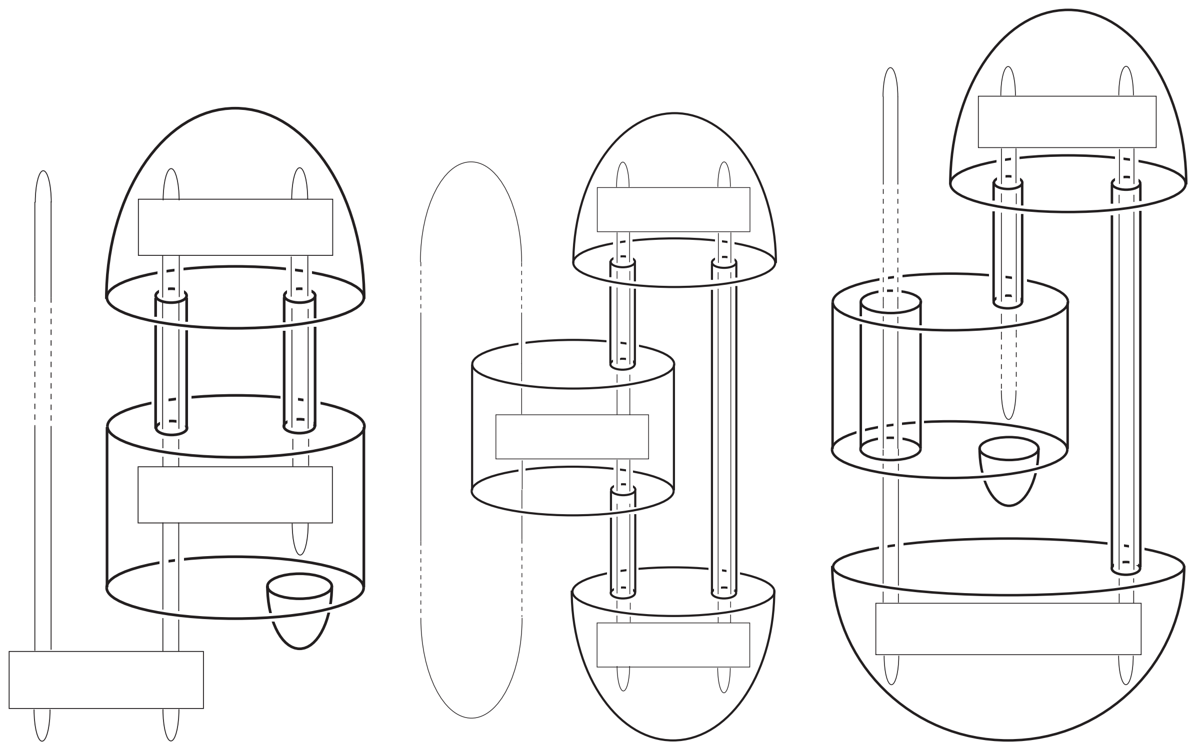


## 定理 II

$K$：3-bridge knot

$F \subset S^3 - K$：closed incompressible and meridionally incompressible surface of genus one

$\Rightarrow$

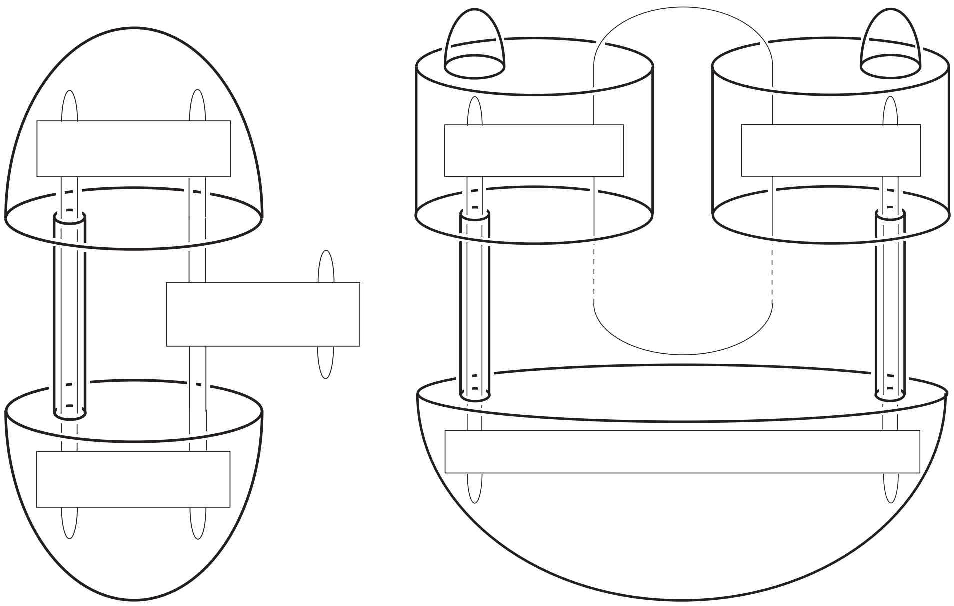


## 定理 III

$K$：3-bridge knot

$F \subset S^3 - K$：closed incompressible and meridionally incompressible surface of genus zero

$\Rightarrow$



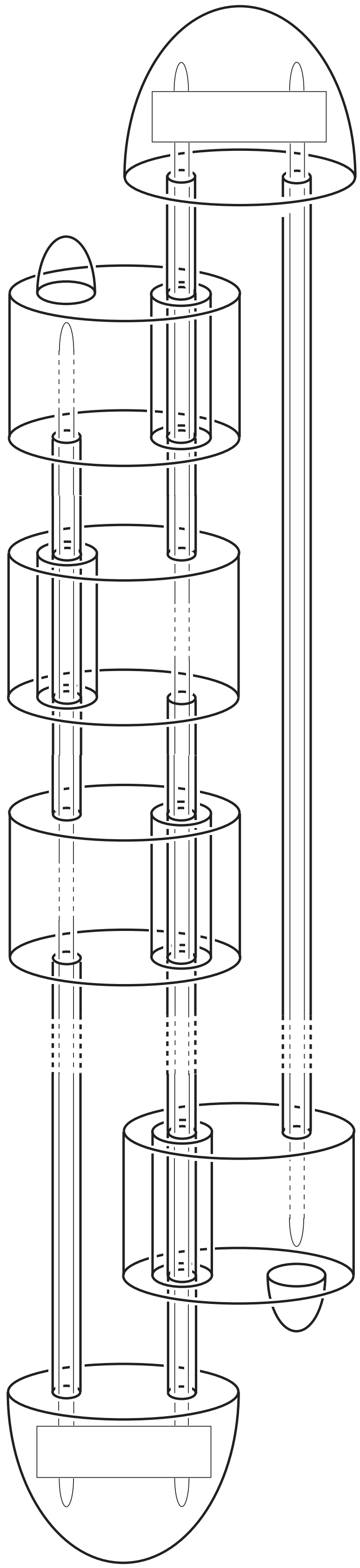
## 種数が３以上の場合

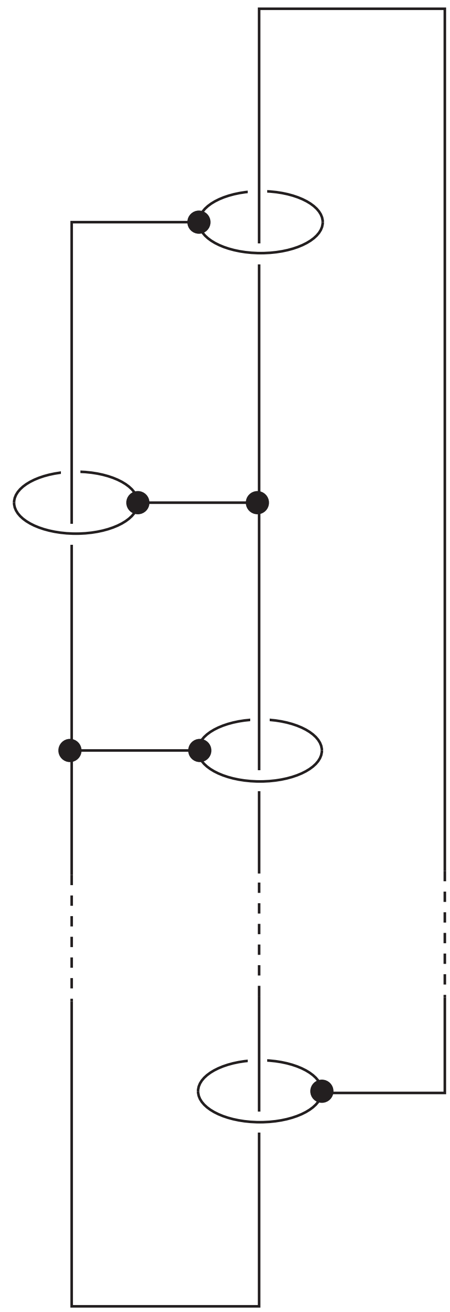
問題 1.27（林）[低次元トポロジー問題集1996年]

3-bridge knot complement内に種数３以上の圧縮不可能かつメリディアン的圧縮不可能な閉曲面は存在するか？

定理 IV

$\forall g \geq 2$
$\exists K$：3-bridge knot
$\exists F \subset S^3 - K$：closed incompressible and meridionally incompressible surface of genus $g$

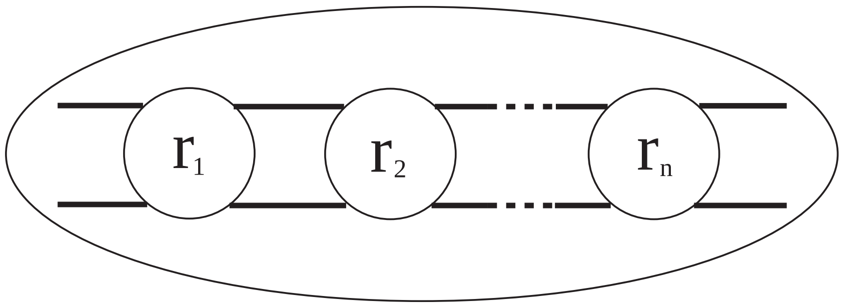




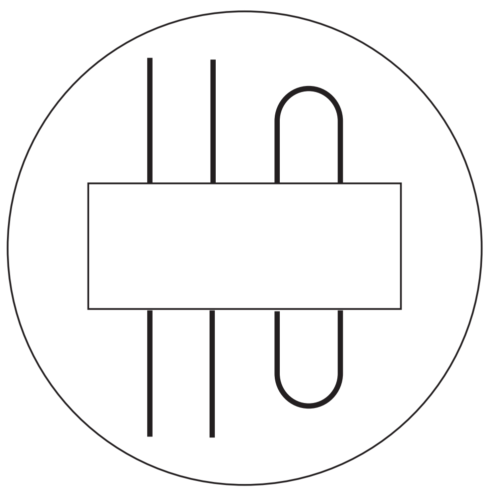
totally knotted
spatial graph

# 3-bridge knot の本質的タングル分解の各因子

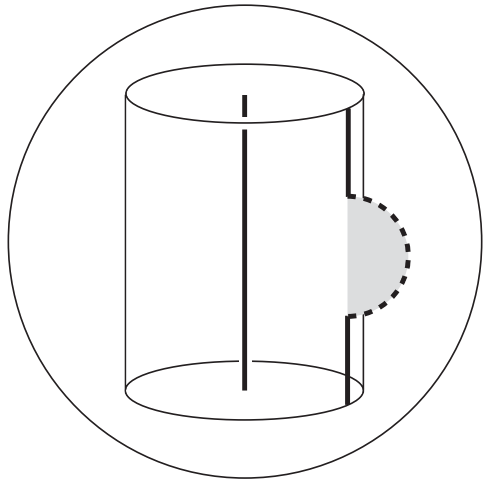
Montesinos tangle $M(r_1, r_2, \ldots, r_n)$




1-bridge tangle



annulus 1-bridge tangle



annulus 1-bridge tangle $\Rightarrow$ 1-bridge tangle

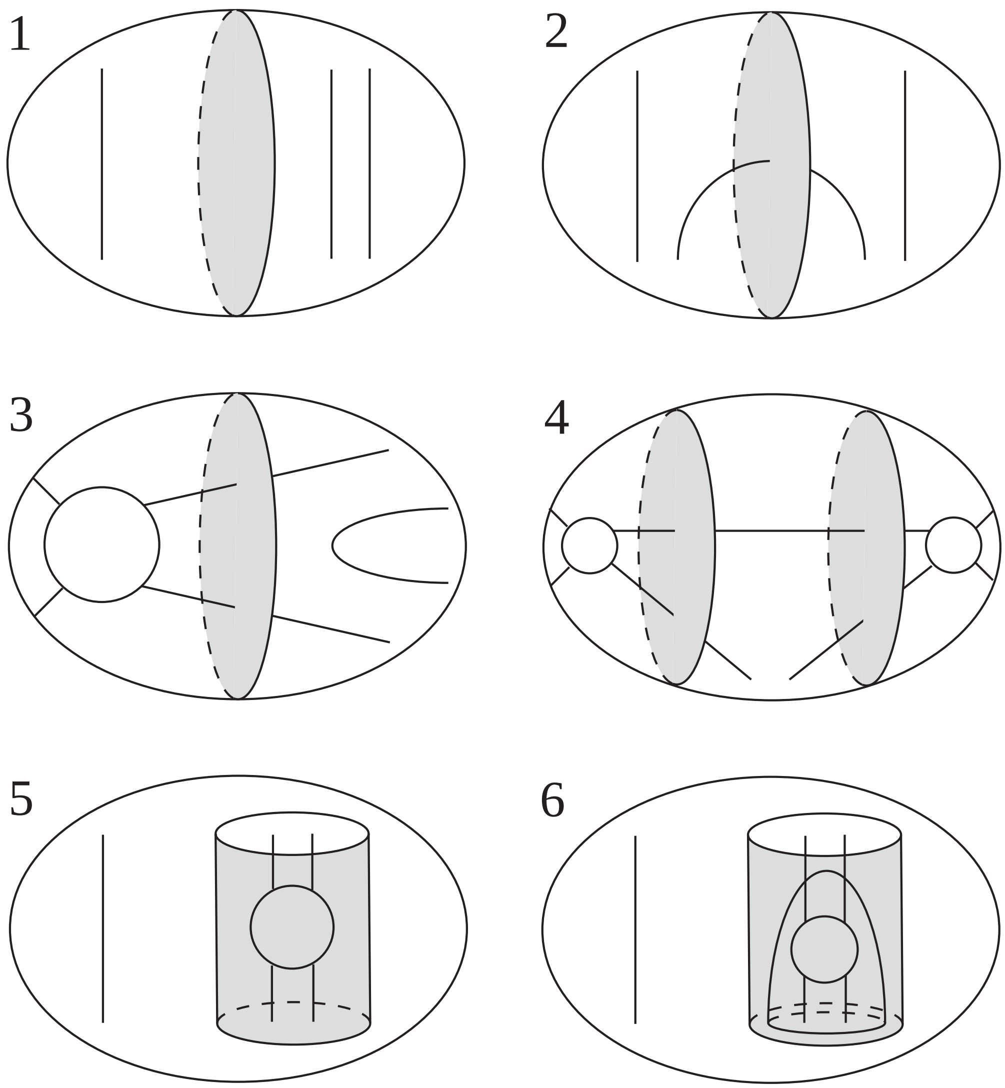
定理 III の系

$K$：3-bridge knot with essential 2-string tangle decomposition

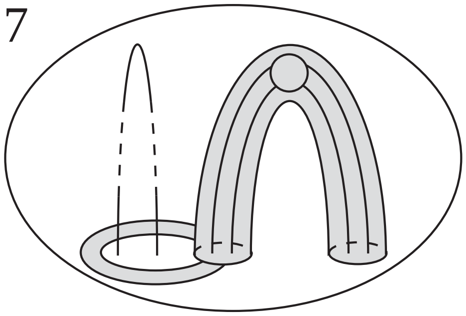
$\Rightarrow$

1. $M(r_1, r_2) \cup$ (1-bridge tangle)
2. $M(r_1, r_2, r_3) \cup$ (annulus 1-bridge tangle)

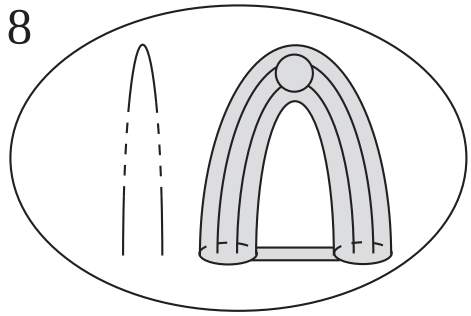
# trivial 3-string tangle内の圧縮不可能かつメリディアン的圧縮不可能曲面



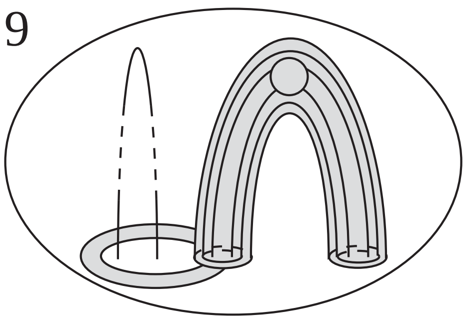
7



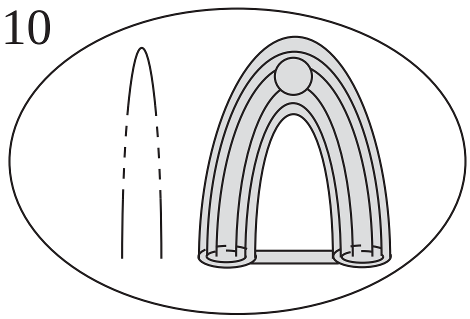
8



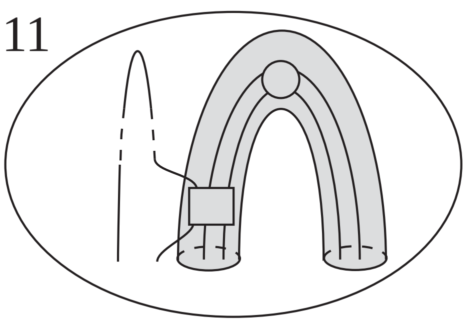
9



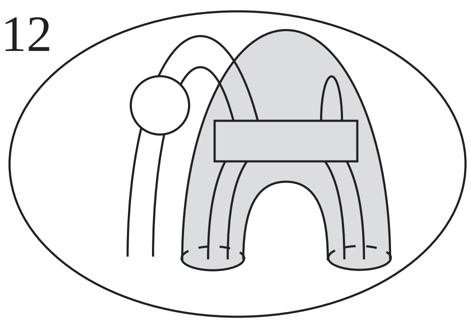
10



11



12



## 補空間に圧縮不可能閉曲面を含む3-bridge knotのtrivial 3-stirng tangleへの分解

**3-bridge tangle decomposition**

- $10 \cup 10 = \mathrm{I}$
- $5 \cup 12 = \mathrm{II} - 1$
- $5 \cup 11 = \mathrm{II} - 2$
- $5 \cup 6 = \mathrm{II} - 3$
- $3 \cup 3 = \mathrm{III} - 1$
- $4 \cup 5 = \mathrm{III} - 2$