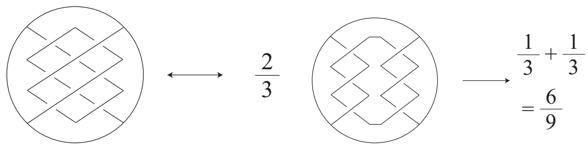
Rational structure on algebraic tangles and closed incompressible surfaces in the complements of algebraically alternating knots and links

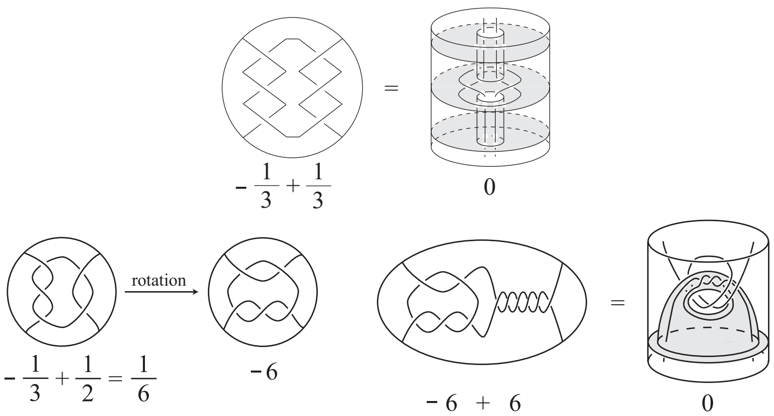
駒澤大学総合教育研究部自然科学部門
小沢　誠

1970 年、Conway（[1]）は有理タングルと有理数が１対１に対応することを示した。1999 年、Krebes（[2]）は代数タングル（一般に、２ストリングタングル）に対して、形式的分数を対応させた。

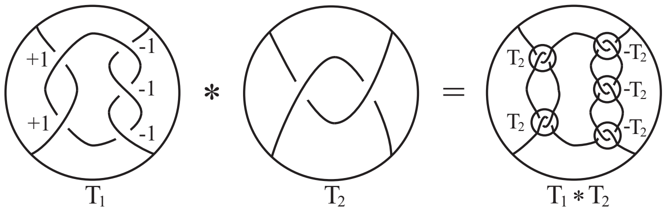


Conway の対応　　　Krebes の対応

定理１. (B,T) を代数タングル、$F \subset B - T$ を本質的曲面とする。このとき、F は T の成分を B 内で分離する。また、$B - T$ は少なくとも一つの本質的曲面を含み、本質的曲面の境界スロープは一意的である。



定理１より、代数タングルから本質的曲面の境界スロープへの写像 ϕ が定まる。
２ストリングタングル T_1 と T_2 の**積** $T_1 * T_2$ を図のように定める。

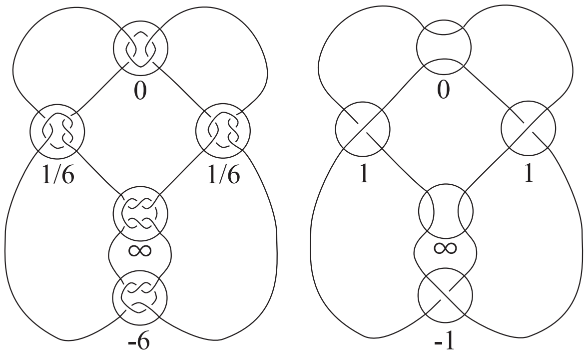


定理２． ϕ は代数タングルから有理数への準同型写像である。即ち、以下が成り立つ。

- $\phi(T_1 + T_2) = \phi(T_1) + \phi(T_2)$
- $\phi(T_1 * T_2) = \phi(T_1)\phi(T_2)$
- $\phi(-T) = -\phi(T)$
- $\phi(T^*) = -\frac{1}{\phi(T)}$

ここで、$+$ はタングル和、$*$ はタングル積、$-$ は鏡映、* は回転を表す。

Conway 表示 $\tilde{K}$ において、各代数タングル T を、$\phi(T) > 0$ （resp. < 0, $= 0$, $= \infty$）ならば、スロープ $+1$（resp. -1, 0, ∞）の有理タングルに置き換えて得られる表示 $\tilde{K_0}$ を $\tilde{K}$ の**基本表示**という。$\tilde{K_0}$ が交代のとき、$\tilde{K}$ を**代数的交代**であるといい、K が代数的交代表示 $\tilde{K}$ を持つとき、K を**代数的交代**であるという。代数的交代絡み目は、代数絡み目と交代絡み目を含むクラスである。



$\tilde{K}$: 代数的交代表示　　$\tilde{K_0}$: $\tilde{K}$ の基本表示

定理３． (S^3, K) を代数的交代絡み目とし、$F \subset S^3 - K$ を本質的閉曲面とする。このとき、F は K の成分を S^3 内で分離する。また、基本表示 $\tilde{K_0}$ は分離的であるか、または F は $\tilde{K}$ のある代数タングルに含まれる。特に、F が球面のとき、$\tilde{K}$ に切断タングルが存在する。F がトーラスであり、かつ切断タングルが存在しないとき、(S^3, K) は Q_2 を含む。

系． 代数的交代結び目補空間内の圧縮不可能閉曲面は、メリディアン的圧縮可能である。

参考文献

[1] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, in "Computational Problems in Abstract Algebra", (D. Welsh, Ed.), pp. 329-358, Pergamon Press, New York, 1970.

[2] David A. Krebes, *An obstruction to embedding 4-tangles in links*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **8** (1999) 321–352.

[3] M. Ozawa, *Rational structure on algebraic tangles and closed incompressible surfaces in the complements of algebraically alternating knots and links*, preprint (2008) http://arxiv.org/abs/0803.1302