Essential state surfaces for knots and links

小沢　誠（駒澤大学総合教育研究部自然科学部門）

平成 19 年 2 月 2 日

1　ユークリッド幾何学と結び目理論

結び目理論をユークリッド幾何学と対応させて考えてみる。

ユークリッド幾何学では、ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の三角形などの図形を対象とし、$\mathbb{R}^2$ の合同変換で移り合うものは合同であるとみなす。基本となる不変量として、角度や長さがあり、二つの三角形 Δ と Δ' が合同である為の必要十分条件は、以下のいずれかを満たすことである。

- 2 辺の長さとその間の角が等しい
- 1 辺の長さとその両端の角が等しい
- 3 辺の長さが等しい

結び目理論では、3 次元球面 S^3 内の閉曲線を対象とし、S^3 の（向きを保つ）同相写像で移り合うものは同値であるとみなす。基本となる不変量として、結び目補空間の基本群があり、二つの結び目 K と K' が同値である為の必要十分条件は、次を満たすことである。

- $\pi_1(S^3 - K)$ と $\pi_1(S^3 - K')$ が同型

また、ユークリッド幾何学での補助線の役割は、結び目理論での曲面の役割に対応すると考えられる。

	ユークリッド幾何学	結び目理論
対象	$(\mathbb{R}^2, \Delta)$	(S^3, K)
変換群	合同変換	同相写像
不変量	角度・長さ	基本群
道具	補助線	曲面

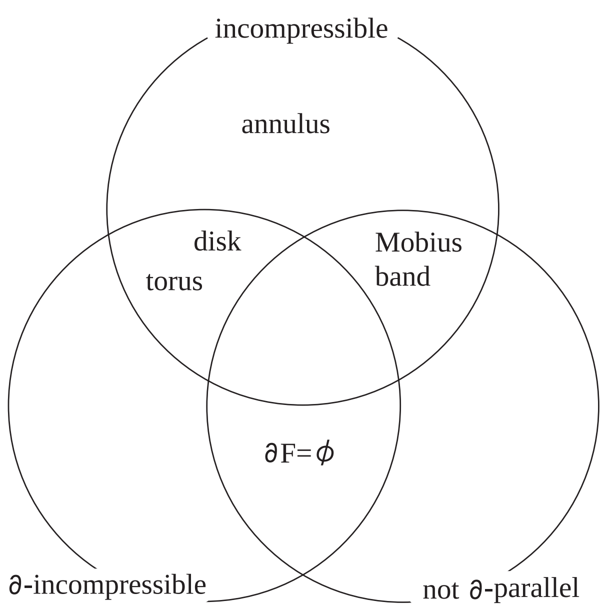
2 結び目の性質と本質的曲面

結び目（又は絡み目）(S^3, K) の幾何的な性質は、結び目外部 $E(K) = S^3 - \mathrm{intN(K)}$ 内の本質的曲面によって定義される。

結び目の性質	本質的曲面
自明	$\exists\, D^2 \subset E(K)$: disk
分離的	$\exists\, S^2 \subset E(K)$: 2-sphere
合成	$\exists\, A \subset E(K)$: annulus s.t. ∂A bounds disks in $N(K)$
タングル合成	$\exists\, P \subset E(K)$: planar surface s.t. ∂P bounds disks in $N(K)$
トーラス	$\exists\, A \subset E(K)$: annulus s.t. A separates $E(K)$ into two solid tori
サテライト	$\exists\, T^2 \subset E(K)$: torus
双曲的	自明、トーラス、サテライトでない
ファイバー	$\exists\, F \subset E(K)$: orientable surface s.t. $E(K) - \mathrm{intN(F)} = \mathrm{F} \times \mathrm{I}$
スモール	$\nexists\, F \subset E(K)$: closed surface

一般に、3 次元多様体 M 内に適切に埋め込まれた曲面 F が次を満たすとき、**本質的（essential）**であると言われる。

- **圧縮不可能（incompressible）**：$\nexists\, D \subset M$: disk s.t. $D \cap F = \partial D$, ∂D は F 内本質的な閉曲線
- **境界圧縮不可能（∂-incompressible）**：$\nexists\, D \subset M$: disk s.t. $D \cap F = \partial D \cap F = \alpha$, α は F 内本質的な弧, $D \cap \partial M = \partial D \cap \partial M = \partial D - \mathrm{int}\alpha$
- **境界平行（∂-parallel）**でない：$\nexists\, F \times I \subset M$ s.t. $F \times \{0\} = F$, $F \times \{1\} \cup \partial F \times I \subset \partial M$



結び目又は絡み目 K に対して、$\mathcal{S}(K) = \{F \subset E(K) | F$ は本質的曲面 $\}$ は K の不変量である。

定理 2.1 M を既約かつ境界既約な 3 次元多様体とし、F_1 と F_2 を M 内に適切に埋め込まれた本質的曲面とする。このとき、F_1 と F_2 のイソトピーで、$F_1 \cap F_2$ の各成分が F_1 内でも F_2 内でも本質的であるようにできる。

また、3 次元多様体 M 内に適切に埋め込まれた曲面 F が次を満たすとき、**π_1-本質的（π_1-essential）**であると言う。

- **π_1-単射（π_1-injective）**：$i_* : \pi_1(F) \to \pi_1(M)$ が単射
- **∂-π_1-単射（∂-π_1-injective）**：$i_* : \pi_1(F, \partial F) \to \pi_1(M, \partial M)$ が単射
- **境界平行（∂-parallel）**でない：$\not\exists\, F \times I \subset M$ s.t. $F \times \{0\} = F, F \times \{1\} \cup \partial F \times I \subset \partial M$

定義より、π_1-本質的ならば、本質的である。

命題 2.2 3 次元多様体 M 内に適切に埋め込まれた両側曲面 F に対して、

- F が本質的 $\iff$ F が π_1-本質的

が成り立つ。一般に、3 次元多様体 M 内に適切に埋め込まれた曲面 F に対して、

- $F \tilde{\times} \partial I$ が本質的 $\iff$ F が π_1-本質的

が成り立つ。

3　結び目の性質と正則表示の性質

結び目を 2 次元球面 S^2 上へ射影し上下の情報を与えることで、正則表示が得られる。一つの正則表示に対して一つの結び目が定まるが、逆に一つの結び目から無数の正則表示が得られる。

正則表示を考える上で、以下は基本的である。

問題 3.1 結び目のある性質が正則表示のある性質を与えるか？逆に、正則表示のある性質から結び目のある性質が導き出せるか？

結び目はいくらでも複雑な正則表示を持つ為、この問題を考える上で、制限の付いた正則表示を考えることは有効である。

結び目の正則表示を辿って一周するとき、交点の上下が交互に現れるものを**交代正則表示**という。交代正則表示を持つ結び目を**交代結び目**という。

結び目の正則表示に向きを付けたとき、全ての交点の符号が正であるものを**正正則表示**という。正正則表示を持つ結び目を**正結び目**という。

結び目の任意の射影図に対して、適当に上下を与えることで、交代正則表示及び正正則表示が得られることに注意する。

交代結び目及び正結び目に関しては、自明性、分離性、素性がその正則表示から読み取ることができる。

定理 3.2 [Menasco, 1984] K を交代結び目又は絡み目とし、D を K の既約な交代正則表示とする。このとき、次が成り立つ。

- K が自明 $\iff$ D が自明
- K が分離的 $\iff$ D が分離的
- K が素 $\iff$ D が素

定理 3.3 [Ozawa, 2002] K を正結び目又は絡み目とし、D を K の既約な正正則表示とする。このとき、次が成り立つ。

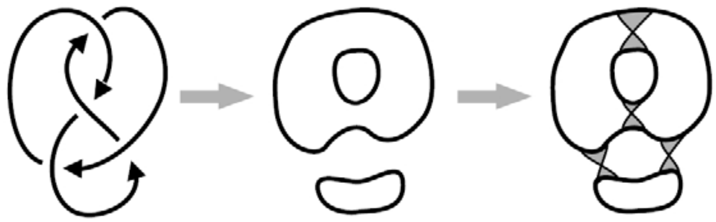
- K が自明 $\iff$ D が自明
- K が分離的 $\iff$ D が分離的
- K が素 $\iff$ D が素

4 ザイフェルト曲面とステイト曲面

S^3 に埋め込まれた向き付け可能曲面 F が、$\partial F = K$ を満たすとき、F を K の**ザイフェルト曲面（Seifert surface）**という。

定理 4.1 [Seifert, 1934] 任意の結び目に対し、ザイフェルト曲面が存在する。

証明は、結び目の正則表示に向きを付け、各交点において向きに沿ってスムージングをする。S^2 上にいくつかの閉曲線（ザイフェルトサークル）ができるが、それらに互いに交わらないように S^2 の下側でディスクを張る。そして、それらのディスクに半捻りバンドを付けてザイフェルト曲面が得られる。



Seifert のアルゴリズムで得られたザイフェルト曲面を**標準的ザイフェルト曲面（canonical Seifert surface）**という。

標準的ザイフェルト曲面 F から、次のように**ザイフェルトグラフ** G を得る。ザイフェルトサークルが張るディスクを頂点に対応させる。ディスクが半捻りバンドで繋がっているとき、辺で結ぶ。辺には、対応する交点の符号を付けておく。

ザイフェルトグラフは、極大なブロック（切断点を持たない連結グラフ）へと一意的に分解される。

ザイフェルトグラフの各ブロックにおいて全ての辺が同符号であるとき、その正則表示は**均質（homogeneous）**であるという。均質正則表示を持つ結び目を**均質結び目**という。

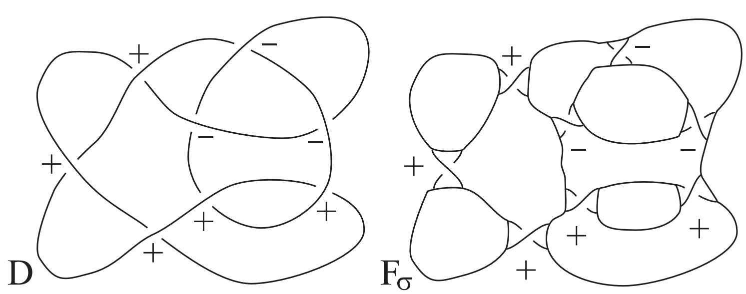
均質結び目のクラスは、交代結び目と正結び目を含んでいる。

結び目の正則表示において、全ての交点で +-スムージングをしたとき、どの交点も異なるループに分かれるとき、その正則表示は **+-充足（+-adequate）**であるという。+-充足正則表示を持つ結び目を **+-充足結び目**という。

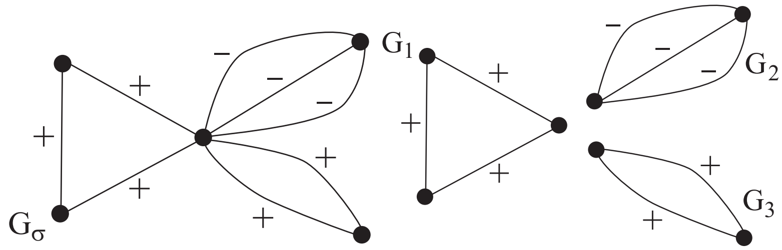
+-充足結び目のクラスは、交代結び目と正結び目を含んでいる。

Seifert の標準的ザイフェルト曲面の拡張として、ステイト曲面を構成し、Cromwell の均質結び目と Lickorish-Thistlethwaite の充足結び目の概念を拡張させて、以下の σ-均質かつ σ-充足結び目の概念に到達した。

K を結び目又は絡み目とし、D を K の正則表示とする。$\sigma:\{D$ の交点$\} \to \{+,-\}$ を D のあるステイトとする。σ に沿ったスムージングをして、S^2 上にいくつかの閉曲線（ステイトサークル）を得る。それらに互いに交わらないように S^2 の下側でディスクを張る。そして、それらのディスクに半捻りバンドを付けて **σ-ステイト曲面（σ-state surface）** F_σ が得られる。



ザイフェルトグラフと同様に、ディスクを頂点に、バンドを辺に対応させて**ステイトグラフ** G_σ を得る。G_σ の辺には、対応する交点 c の符号 $\sigma(c)$ を与えておく。G_σ はいくつかの極大なブロックへ一意的に分解される。



正則表示 D が σ-**充足（σ-adequate）**であるとは、G_σ がループを持たないときをいう。正則表示 D が σ-**均質（σ-homogeneous）**であるとは、G_σ の各ブロックにおいて、全ての辺が同じ符号を持つときをいう。

結び目又は絡み目 K のある正則表示 D とあるステイト σ が存在して、D が σ-充足（resp. σ-均質）であるとき、K を σ-**充足（σ-均質）**であるという。

5　結果と証明

定理 5.1 あるステイト σ に対して、正則表示 D が σ-充足かつ σ-均質ならば、σ-ステイト曲面 F_σ は π_1-本質的である。

定理 5.2 K をあるステイト σ に関して σ-充足かつ σ-均質な結び目又は絡み目とし、D を K の既約な σ-充足かつ σ-均質な正則表示とする。このとき、次が成り立つ。

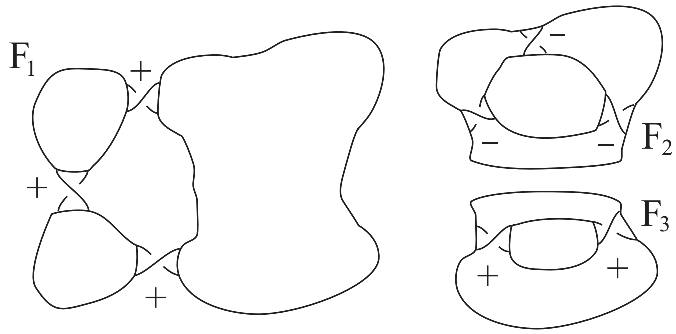
- K が自明 $\iff$ D が自明
- K が分離的 $\iff$ D が分離的
- K が素 $\iff$ D が素

定理 5.1 の証明は次の二つの定理から従う。定理 5.3 は、元々Aumann によって示されていたものであるが、1993 年に Menasco-Thistlethwaite によって再証明され、2006 年に Ozawa によって一般化された交代結び目に拡張されている。定理 5.4 は Gabai のザイフェルト曲面の村杉和（$*$-積）に関する定理の一般の曲面への拡張である。

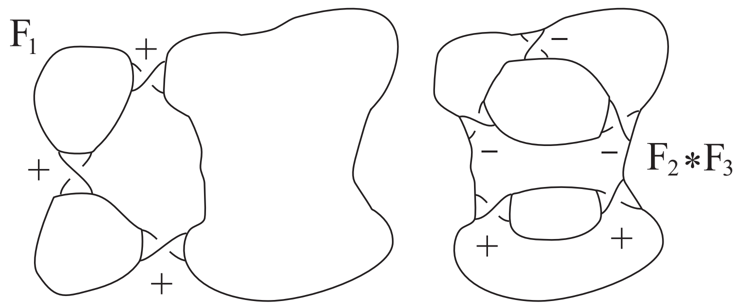
定理 5.3 [Aumann] K を交代結び目又は絡み目とし、D を既約かつ素な交代正則表示とする。このとき、チェッカーボード曲面は π_1-本質的である。

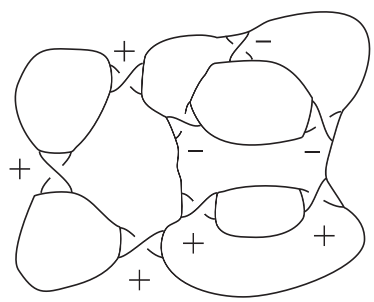
定理 5.4 [Ozawa] F_1, F_2 が π_1-本質的ならば、$*$-積 $F_1 * F_2$ は π_1-本質的である。

定理 5.3 より、G_σ の各ブロック G_i に対応する曲面 F_i は π_1-本質的である。



定理 5.4 より、これらの曲面の $*$-積として得られる曲面 F_σ は π_1-本質的である。





$F_\sigma = F_1 * (F_2 * F_3)$

この証明より、次のことが分かる。

『σ-充足かつ σ-均質な結び目又は絡み目は、交代正則表示のチェッカーボード曲面の $*$-積で得られる曲面の境界である。』

定理 5.2 の証明は、π_1-本質的な σ-ステイト曲面 F_σ と、本質的なディスク・球面・アニュラスとの交わりを考えることで、示すことができる。

F を $E(K)$ 内に適切に埋め込まれたディスク又は 2 次元球面とする。σ-ステイト曲面 F_σ と F との交わりは、定理 2.1 より、無くすことができる。（ディスク及び 2 次元球面内には、本質的なループやアークが無い為。）これは、F がディスクの場合は正則表示 D の交点が無いことを意味し、F が 2 次元球面の場合は正則表示 D が分離的であることを意味する。従って、定理 5.2 の自明性と分離性についての命題が成り立つ。素性については、定理 2.1 だけでは直ぐに分からないが、F_σ を $*$-分解する球面と K を分解する球面の交わりを調べることで示すことができる。

6　今後の課題

Menasco-Thistlethwaite は、交代結び目のチェッカーボード曲面同士の交わりを調べることで、Tait の反転予想を解き、交代結び目を分類した。同様に、σ-ステイト曲面を利用することで、σ-充足かつ σ-均質結び目及び絡み目の分類ができる可能性がある。

その為に先ず、σ-充足かつ σ-均質結び目の σ-充足かつ σ-均質正則表示が有限個であることを示し、それらの正則表示がどのような変形で移り合うか調べる必要がある。この問題については、多項式不変量を用いるか、ステイト曲面同士の交わりを調べることで、解決できると期待している。

参考文献

- R. J. Aumann, *Asphericity of alternating knots*, Ann. of Math. **64** (1956) 374–392.
- P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 535–552.
- D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Contemp. Math. **20** (1983) 131–143.
- W. B. R. Lickorish and M. B. Thistlethwaite, *Some links with non-trivial polynomials and their crossing numbers*, Comment. Math. Helvetici **63** (1988) 527–539.
- W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37–44.
- W. Menasco and M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*, Ann. Math. **138** (1993) 113–171.
- M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, Comment. Math. Helv. **77** (2002) 235–243.
- M. Ozawa, *Non-triviality of generalized alternating knots*, J. Knot Theory and its Ramifications **15** (2006) 351–360.
- M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, preprint available in http://arxiv.org/abs/math.GT/0609166.
- H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Ann. **110** (1934) 571– 592.